(e) La aceleración siempre es −32 pies por segundo por segundo. Ésta es la aceleración debida a la gravedad cerca del mar. ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(x)$, entonces la tercera derivada de y con respecto a x puede denotarse por cualquiera de los siguientes cuatro símbolos: _____.

2. Si $s = f(t)$ denota la posición de una partícula en un eje coordenado en el instante t, entonces su velocidad está dada por _____, su rapidez está dada por _____, y su aceleración está dada por _____.

3. Si $s = f(t)$ denota la posición de un objeto en el instante t, entonces el objeto está moviéndose hacia la derecha si _____ .

4. Suponga que un objeto se lanza directamente hacia arriba de modo que su altura s en el instante t está dado por $s = f(t)$. El objeto alcanza su altura máxima cuando $ds/dt =$ _____, después del cual ds/dt _____.

Conjunto de problemas 2.6

En los problemas del 1 al 8 encuentre d^3y/dx^3.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$

2. $y = x^5 + x^4$

3. $y = (3x + 5)^3$

4. $y = (3 - 5x)^5$

5. $y = \operatorname{sen}(7x)$

6. $y = \operatorname{sen}(x^3)$

7. $y = \dfrac{1}{x - 1}$

8. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

En los problemas del 9 al 16 encuentre $f''(2)$.

9. $f(x) = x^2 + 1$

10. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$

11. $f(t) = \dfrac{2}{t}$

12. $f(u) = \dfrac{2u^2}{5 - u}$

13. $f(\theta) = (\cos\theta\pi)^{-2}$

14. $f(t) = t\operatorname{sen}(\pi/t)$

15. $f(s) = s(1 - s^2)^3$

16. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x - 1}$

17. Sea $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Por consiguiente, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Damos a $n!$ el nombre de ***n factorial***. Demuestre que $D_x^n(x^n) = n!$

18. Encuentre una fórmula para

$$D_x^n(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

19. Sin hacer cálculo alguno, encuentre cada derivada.

(a) $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$

(b) $D_x^{12}(100x^{11} - 79x^{10})$

(c) $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

20. Encuentre una fórmula para $D_x^n(1/x)$.

21. Si $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$, encuentre el valor de f'' en cada cero de f', esto es, en cada punto c en donde $f'(c) = 0$

22. Suponga que $g(t) = at^2 + bt + c$ y $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ y $g''(1) = -4$. Encuentre a, b y c.

En los problemas del 23 al 28, un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula s =f(t), donde s, la distancia dirigida medida desde el origen, está en pies y t está en segundos. En cada caso, responda las siguientes preguntas (véanse los ejemplos 2 y 3).

(a) ¿Cuáles son $v(t)$ y $a(t)$, la velocidad y la aceleración, en el instante t?

(b) ¿Cuándo está moviéndose el objeto hacia la derecha?

(c) ¿Cuándo está moviéndose hacia la izquierda?

(d) ¿Cuándo es negativa su aceleración?

(e) Dibuje un diagrama esquemático que muestre el movimiento del objeto.

23. $s = 12t - 2t^2$

24. $s = t^3 - 6t^2$

25. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

26. $s = 2t^3 - 6t + 5$

27. $s = t^2 + \dfrac{16}{t}, t > 0$

28. $s = t + \dfrac{4}{t}, t > 0$

29. Si $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

30. Si $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

31. Dos objetos se mueven a lo largo de un eje coordenado. Al final de t segundos sus distancias dirigidas desde el origen, en pies, están dadas por $s_1 = 4t - 3t^2$ y $s_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.

(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad?

(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

32. Las posiciones de dos objetos, P_1 y P_2, en un eje coordenado al final de t segundos, están dadas por $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$, respectivamente. ¿Cuándo tienen la misma velocidad los dos objetos?

33. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos (véase el ejemplo 4).

(a) ¿Cuál es su velocidad inicial?

(b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

$\boxed{\text{C}}$(d) ¿Cuándo llega al suelo?

$\boxed{\text{C}}$(e) ¿Con qué rapidez llega al suelo?

34. Un objeto lanzado directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 48 pies por segundo es $s = 48t - 16t^2$ pies de altura al final de t segundos.

(a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

(b) Al final de un segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el objeto y en qué dirección?

(c) ¿Cuánto tarda en regresar a su posición original?

$\boxed{\text{C}}$ **35.** Un proyectil se dispara directamente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Su altura a los t segundos está dada por $5 = v_0t - 16t^2$ pies. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que el proyectil alcance una altura máxima de 1 milla?

36. Se lanza un objeto directamente hacia abajo desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, cae $s = v_0t + 16t^2$ pies en t segundos. Si cae al océano en 3 segundos a una velocidad de 140 pies por segundo, ¿cuál es la altura del acantilado?

37. Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal, de tal manera que su posición en el instante t está especificada por $s = t^3 - 3t^2 - 24t - 6$. Aquí, s se mide en centímetros y t, en segundos. ¿Cuándo está frenándose el objeto; es decir, cuándo su *rapidez* está disminuyendo?

38. Explique por qué un punto que se mueve a lo largo de una línea está frenándose cuando su velocidad y su aceleración tienen signos opuestos (véase el problema 37).

EXPL **39.** Leibniz obtuvo una fórmula general para $D_x^n(uv)$, donde u y v son funciones de x. Vea si usted puede encontrarla. *Sugerencia:* empiece por considerar los casos $n = 1, n = 2$ y $n = 3$.

40. Utilice la fórmula del problema 39 para encontrar $D_x^4(x^4 \operatorname{sen} x)$.

GC **41.** Sea $f(x) = x[\operatorname{sen} x - \cos(x/2)]$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ en $[0, 6]$ utilizando los mismos ejes.

(b) Evalúe $f'''(2.13)$.

GC **42.** Repita el problema 41 para $f(x) = (x + 1)/(x^2 + 2)$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $f'''(x)$; $D_x^3 y$; d^3y/dx^3; y''' **2.** ds/dt; $|ds/dt|$; d^2s/dt^2
3. $f'(t) > 0$ **4.** 0; <0

2.7 Derivación implícita

En la ecuación

$$y^3 + 7y = x^3$$

no podemos despejar y en términos de x. Sin embargo, aún puede ser el caso de que exista exactamente una y correspondiente a cada x. Por ejemplo, podemos preguntar qué valores de y (si existe alguno) corresponden a $x = 2$. Para responder esta pregunta, debemos resolver

$$y^3 + 7y = 8$$

Desde luego, $y = 1$ es una solución, y resulta que $y = 1$ es la *única* solución real. Dado $x = 2$, la ecuación $y^3 + 7y = x^3$ determina un correspondiente valor de y. Decimos que la ecuación define a y como una función **implícita** de x. La gráfica de esta ecuación, que se muestra en la figura 1, por supuesto que se ve como la gráfica de una función derivable. El nuevo elemento es que no tenemos una ecuación de la forma $y = f(x)$. Con base en la gráfica, suponemos que y es alguna función desconocida de x. Si denotamos a esta función como $y(x)$, podemos escribir la ecuación como

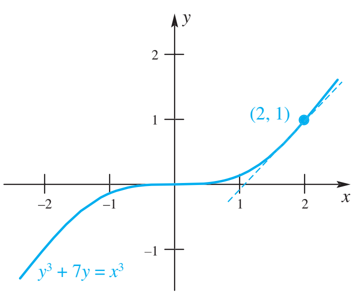

Figura 1

$$[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3$$

Aunque no tenemos una fórmula para $y(x)$, podemos, a pesar de eso, obtener una relación entre x, $y(x)$ y $y'(x)$, mediante la derivación, respecto a x, de ambos lados de la ecuación. Recordando aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Obsérvese que nuestra expresión para dy/dx incluye tanto a x como a y, un hecho que con frecuencia es una molestia. Pero si sólo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, no existe dificultad. En $(2, 1)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

La pendiente es $\frac{6}{5}$.

El método que se acaba de ilustrar para determinar dy/dx sin despejar primero la y —de manera explícita de la ecuación dada— en términos de x se denomina **derivación implícita**. Pero, ¿el método es legítimo? ¿Da la respuesta correcta?